

ΣΥΝΤΟΜΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

ΘΕΜΑ: Μη ομογενή προβλήματα συνοριακών τιμών και η συνάρτηση Green (2)

- Το γενικό πρόβλημα συνοριακών τιμών και η συνάρτηση Green

Για $y \in C^2[a, b]$, θέτουμε

$$L[y] := y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t)$$

και

$$\begin{aligned} C^1[y] &:= c_1y(a) + c_2y'(a) + c_3y(b) + c_4y'(b), \\ C^2[y] &:= d_1y(a) + d_2y'(a) + d_3y(b) + d_4y'(b). \end{aligned}$$

Θεωρούμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών που απαρτίζεται από την γραμμική εξίσωση δεύτερης τάξης

$$L[y] := y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = f(t), \quad t \in [0, 1]$$

και τις (γραμμικές) συνοριακές τιμές

$$\begin{aligned} C^1[y] &:= c_1y(0) + c_2y'(0) + c_3y(1) + c_4y'(1) = A \\ C^2[y] &:= d_1y(0) + d_2y'(0) + d_3y(1) + d_4y'(1) = B. \end{aligned}$$

και συμβολίζουμε με $L_f - C_{A,B}$

- Επανάληψη των βασικών Προτάσεων ύπαρξης λύσεων - Διάλεξη 8
- Ύπαρξη λύσεων για το μη ομογενές πστ.

ΠΡΟΤΑΣΗ. Αν $\{y_1, y_2\}$ είναι ένα βασικό σύνολο της ομογενούς εξίσωσης L_0 .

Τότε το μη ομογενές πστ $L_f - C_{A,B}$ έχει μία ακριβώς λύση αν και μόνον αν το ομογενές πστ $L_0 - C_0$ έχει μόνον την μηδενική λύση.

[Δηλαδή αν και μόνον αν είναι $D(y_1, y_2) \neq 0$]. **Απόδειξη.**

ΠΡΟΤΑΣΗ. Υποθέτουμε ότι το ομογενές πρόβλημα $L_0 - C_0$ έχει μόνον την μηδενική λύση. Τότε:

(Α) Υπάρχει μοναδική συνάρτηση Green, G για το πρόβλημα $L_0 - C_0$.

(Β) Η μοναδική λύση του προβλήματος $L_b - C_0$ δίνεται από τον τύπο

$$y(t) = \int_a^b G(t, s)b(s)ds, \quad t \in (a, b).$$

Απόδειξη. ΕΡΓΑΣΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ (ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ)

Παράδειγμα.

ΠΡΟΤΑΣΗ. Υποθέτουμε ότι το ομογενές πρόβλημα $L_0 - C_0$ έχει μόνον την μηδενική λύση και ας είναι G η συνάρτηση Green του προβλήματος $L_0 - C_0$.

Τότε η μοναδική λύση του προβλήματος $L_b - C_{A,B}$ δίνεται από τον τύπο

$$y(t) = w(t) + \int_a^b G(t, s)b(s)ds, \quad t \in (a, b).$$

όπου w είναι η λύση του προβλήματος $L_0 - C_{A,B}$.

Απόδειξη. ΕΡΓΑΣΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ (ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ)

Παράδειγμα.

- **ΕΦΑΡΜΟΓΗ.** Χρήση της συνάρτησης Green για εκφράσεις των λύσεων σε μη γραμμικά προβλήματα συνοριακών τιμών - ιδιότητες των λύσεων με χρήση ιδιοτήτων των (ήδη γνωστών) συναρτήσεων Green.

Παράδειγμα.